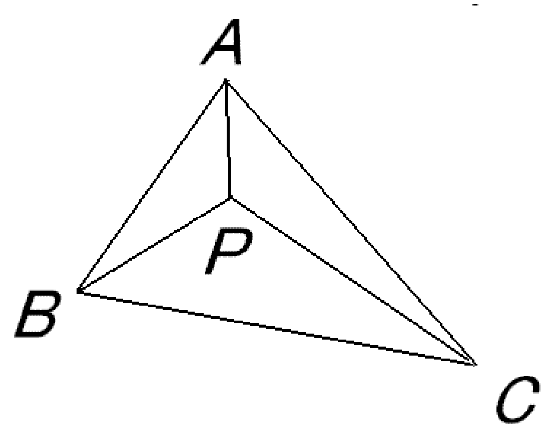
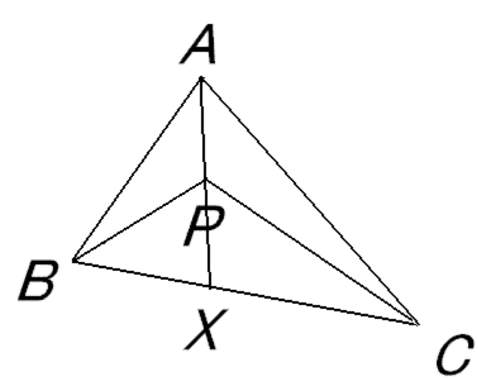
حل چند مسئله ی هندسه

۱- مثلث زیر را در نظر بگیرید. زوایای PBC و PCA و PAB همگی مساوی و برابر با ۳۰ درجه اند. ثابت کنید این مثلث متساوی الاضلاع است. توجه کنید که هیچ اطلاعی درباره مکان نقطه P نداریم.



حل مساله:

به شکل زیر توجه کنید:



۲- فرض کنید

$$\alpha = \widehat{PXB}.$$

بنابر قضیه سینوسها در مثلث داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{PX}{PB} = \dfrac{\sin 30}{\sin \alpha} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sin \alpha} \\[2ex] \dfrac{PX}{PC} = \dfrac{\sin(C-30)}{\sin(180-\alpha)} = \dfrac{\sin(C-30)}{\sin \alpha}. \end{cases}$$

لذا می توان نوشت:

$$.\frac{PB}{PC} = 2\sin(C-30)$$

به همین ترتیب می توان ثابت کرد که:

$$\frac{PC}{PA} = 2\sin(A-30), \quad \frac{PA}{PB} = 2\sin(B-30).$$

باضرب اینها درهم خواهیم داشت:

$$\sin(A-30)\sin(B-30)\sin(C-30) = \frac{1}{8}.$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} &= \frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B-60)]\sin(C-30)\\ &= \frac{1}{2}[\cos(A-B)-\sin(C-30)]\sin(C-30).\end{aligned}$$

درنتیجه:

$$\cos(A-B)=\frac{1}{4\sin(C-30)}+\sin(C-30)$$

حال فرض کنید

$$f(x)=\frac{1}{4x}+x$$

می توان دید که اگر $x>0$ **آنگاه** $f(x)\geq 1$. **لذا**

$$\cos(A-B)=\frac{1}{4\sin(C-30)}+\sin(C-30)=1$$

که نتیجه می دهد:

$$A=B=C=60^{\circ}$$

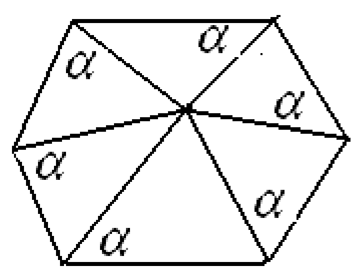
بد نیست بدانیم که این مساله قابل تعمیم به چند ضلعی های محدب است. به طور مثال یک چهار ضلعی محدب را با نقطه ای در درون آن در نظر بگیرید. از این نقطه به چهار راس چهار ضلعی وصل کنید به گونه ای که همانند مساله بالا یک در میان زاویه های مساوی اما در اینجا ۴۵ درجه ایجاد شود. در اینصورت این چهار ضلعی باید یک مربع باشد. این مطلب برای چند ضلعی های بالاتر نیز برقرار است.

حالت کلی مساله را به طور ساده می توان به صورت زیر بیان کرد:

در داخل یک n–ضلعی محدب، نقطه P را در نظر بگیرید و آنرا به همه رئوس وصل کنید. یکی از n مثلث به وجود آمده و یکی از زوایای غیر هم راس با P را انتخاب کنید. این زاویه را آلفا بنامید. حال در جهت مثلثاتی حرکت کنید و همه زوایای مثلثهای دیگر را هم که از لحاظ مکانی مشابه با این زاویه هستند (به شکل زیر توجه کنید) آلفا بنامید. ثابت کنید اگر همه این زوایا با هم برابر باشند و داشته باشیم:

$$\alpha = 90 - \frac{180}{n}$$

آنگاه این n–ضلعی، منتظم است.



البته حل این مساله چندان آسان نیست. اگر به راه حل خوبی از این مساله کلی تر دسترسی پیدا کردید، خوانندگان را بی نصیب نگذارید. متشکریم.

۱. **برای** $i=1,2$ **فرض کنید** T_i **مثلثی با اضلاع به طولهای** a_i **,** b_i **و** c_i **و مساحت** A_i **باشد. فرض کنید که** $a_1 \le a_2, b_1 \le b_2, c_1 \le c_2$ **و** T_2 **مثلثی با زوایای حاده باشد. آیا می توان نتیجه گرفت که** $A_1 \le A_2$**؟**

منبع: مسابقه پاتنام آمریکا سال ۲۰۰۴

حل مساله:

بله. برای $i=1,2$ **فرض کنید** α_i **،** β_i **و** γ_i **به ترتیب زوایای روبه رو به اضلاع** a_i **,** b_i **و** c_i **باشند. چون** $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \pi$ **، بنابر این حداقل یکی از نامساویهای زیر برقرار است:**

$$\alpha_1 \le \alpha_2, \beta_1 \le \beta_2, \gamma_1 \le \gamma_2$$

بدون از دست دادن کلیت می توان فرض کرد که $\alpha_1 \le \alpha_2$ **. اما** $\alpha_2 \le \frac{\pi}{2}$ **و اینکه** $\sin x$ **در** $[0, \frac{\pi}{2}]$ **صعودي است. لذا.**

$$A_1 = \frac{1}{2} b_1 c_1 \sin \alpha_1 \le \frac{1}{2} b_2 c_2 \sin \alpha_2 = A_2$$

---

۲. **فرض کنید:**

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

ثابت کنید:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} < \frac{1}{4}$$

منبع: المپیاد ریاضی مجارستان سال ۱۸۹۷

حل مساله:

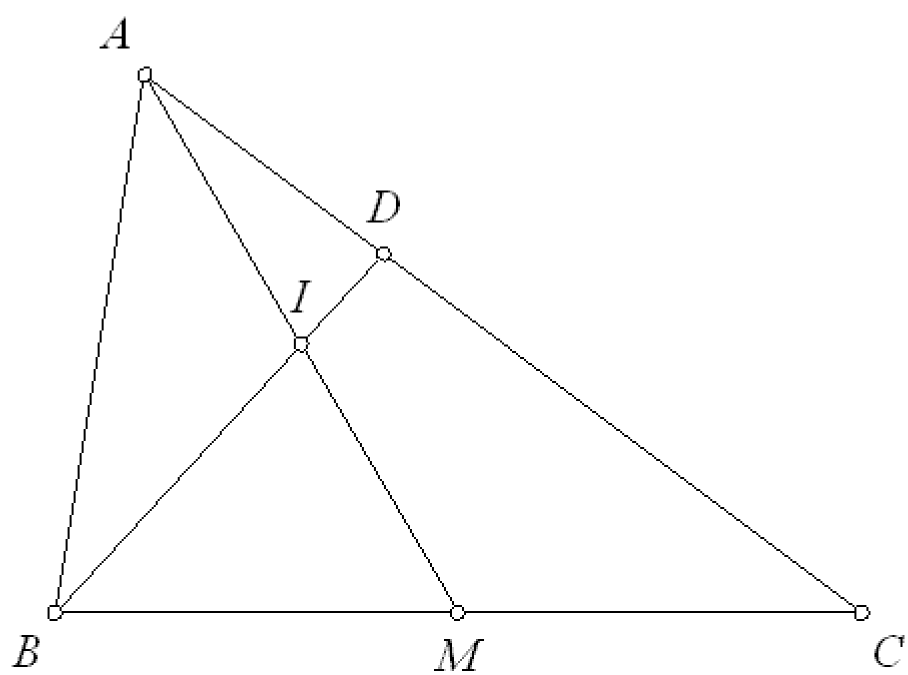
فرض کنیم R **شعاع دایره محیطی و** r **شعاع دایره محاطی مثلثی باشد که زوایای آن آلفا، بتا و گاما هستند. بنابر یک قضیه معروف داریم:**

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R}$$

چون r **از** R **کوچکتر است نامساوی مورد نظر ثابت می شود.**

---

۳. **در مثلث دلخواه زیر،** M **وسط** BC **و** I **وسط** AM **است.** BI **را ادامه دهید تا** AC **را در** D **قطع کند. ثابت کنید مساحت مثلث** ABC **، دوازده برابر مساحت مثلث** AID **است.**



منبع: المپیاد ریاضی در ایران، تالیف دکتر عبادالله محمودیان

حل مساله:

به شکل زیر توجه کنید. چون میانه، مثلث را به دو قسمت هم مساحت تقسیم می کند بنابر این مساحت مثلث ABC **چهار برابر** AIC **است. چون دو مثلث** AIC **و** AIDَ **دارای ارتفاع مشترک** CH **هستند کافیست ثابت کنیم** AC **سه برابر** AD **است. از** I **خطی موازی** BC **رسم می کنیم تا** AC **را در** 'I **قطع کند. چون** I **وسط** AM **است پس** MC **دو برابر** I'I **و لذا** BC **چهار برابر** I'I **است. از تشابه دو مثلث** DI'I **و** DBC **داریم:**

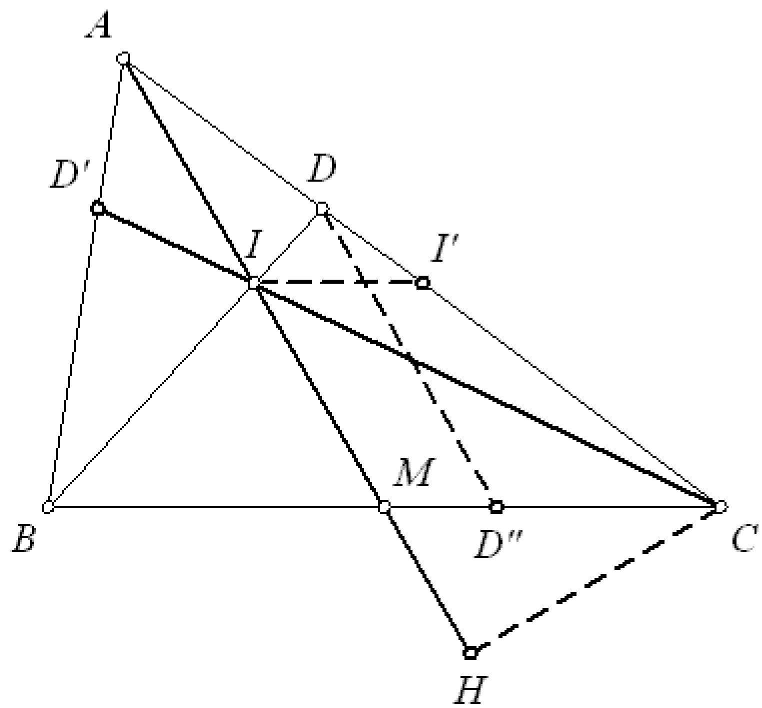
$$\frac{DI}{DB}=\frac{II'}{BC}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{DB}{DI}=\frac{4}{1}\Rightarrow\frac{DB}{BI}=\frac{4}{3}$$

از D **خطی موازی** AM **رسم می کنیم تا** BC **را در** "D **قطع کند. از تشابه دو مثلث** AMC **و** D"DC **داریم:**

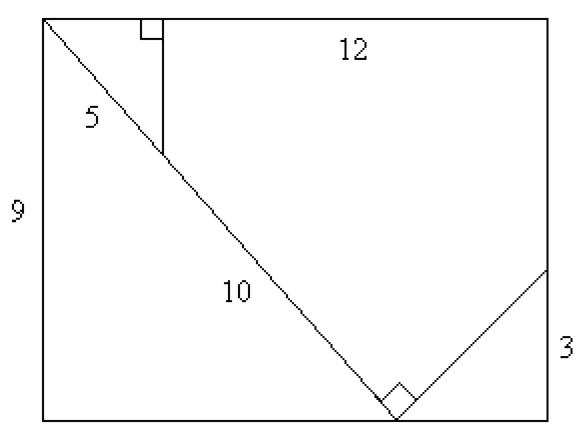
$$\frac{DC}{AC}=\frac{DD''}{AM}=\frac{DD''}{2IM}=\frac{1}{2}\times\frac{DD''}{IM}$$

اما دو مثلث BD"D **و** BIM **نیز متشابهند، لذا**

$$\frac{DD''}{IM}=\frac{BD}{BI}\Rightarrow\frac{DD''}{IM}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{DC}{AC}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{AC-DC}{AC}=1-\frac{DC}{AC}=\frac{1}{3}$$



۴. **مستطیلی را مطابق شکل زیر تقسیم کرده ایم که اندازه بعضی از قسمتها در شکل نشان داده شده است. اگر قطعه های مستطیل را طوری مرتب کنیم که مربعی تشکیل دهند، محیط این مربع چه خواهد بود؟**



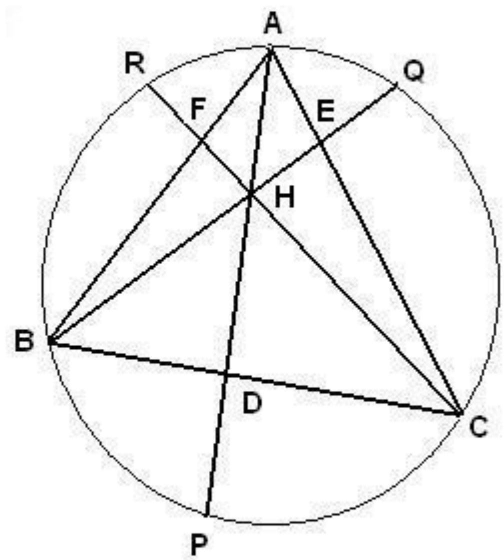
منبع: پانصد مساله ریاضی پیکار جو–ترجمه مهران اخباریفر

حل مساله:

طول ضلعهای مستطیل ۹ و ۱۶ است. بنابر این مساحت مربع باید ۱۴۴ باشد. پس طول ضلع مربع ۱۲ و محیط آن ۴۸ است.

---

۵. **به شکل زیر توجه کنید. فرض کنید** ABC **مثلثی دلخواه با سه زاویه حاده باشد. سه ارتفاع** AD **و** BE **و** CF **را امتداد دهید تا دایره محیطی را به ترتیب در سه نقطه** P **و** Q **و** R **قطع کنند.اگر** h **طول بزرگترین ارتفاع و** s **طول کوچکترین پاره خط از بین پاره خطهای** AP **و** BQ **و** CR **باشد ثابت کنید عدد** s۳h-۴ **نامنفی است.**



حل مساله:

می دانیم که قرینه نقطه H **نسبت به هر یک از اضلاع روی دایره محیطی است. حال با توجه به خواص مقدماتی مثلث و نیز نامساوی هندسی – حسابی می توان نوشت:**

$$\frac{AP}{AD} = 1 + \frac{DP}{AD} = 1 + \frac{KD}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AD} + \frac{BQ}{BE} + \frac{CR}{CF} = 3 + \frac{KD}{AD} + \frac{KE}{BE} + \frac{KF}{FC}$$

$$= 3 + \frac{S_{KBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AKC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AKB}}{S_{ABC}} = 4$$

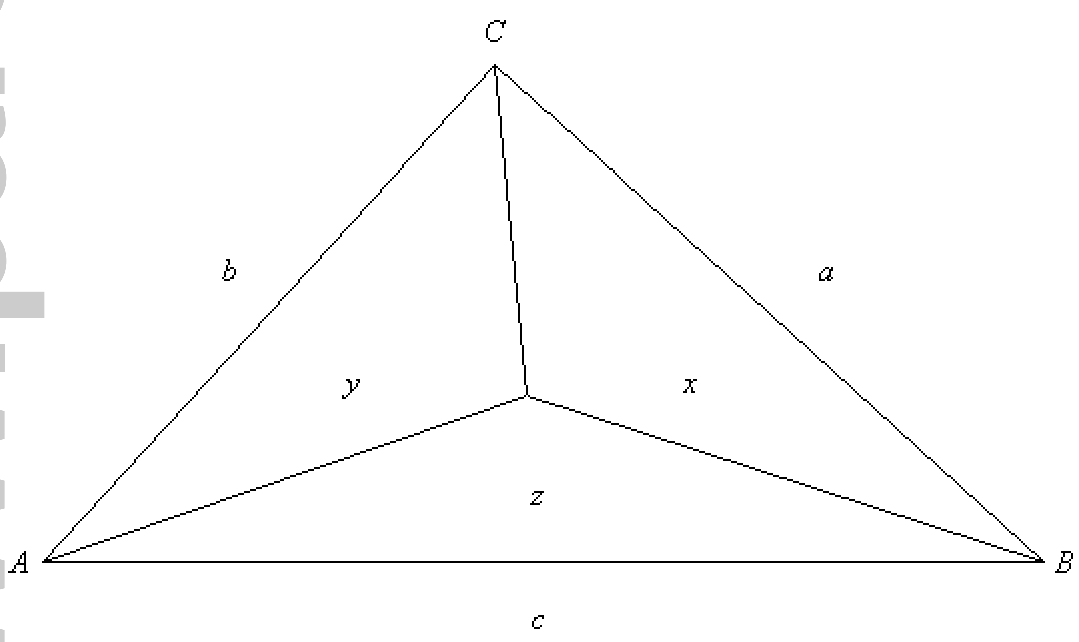
$$\Rightarrow \frac{AP}{AD} \times \frac{BQ}{BE} \times \frac{CR}{CF} \leq \frac{64}{27} \Rightarrow \frac{e^3}{k^3} \leq \frac{64}{27} \Rightarrow \frac{k}{e} \geq \frac{3}{4}$$

---

۶. **یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع صحیح در نظر بگیرید. رئوس آن را به مرکز ثقل مثلث وصل کنید تا سه مثلث کوچکتر به دست آید. ثابت کنید مساحتهای این سه مثلث، اعداد صحیح زوج هستند.**

حل مساله:

به شکل زیر توجه فرمایید:



با استفاده از خاصیت نقطه همرسی میانه ها می توان ثا بت کرد که $x=y=z$ **که** x، y **و** z **مساحتهای سه**

مثلث داخلی است و اینکه x ، یک سوم مساحت مثلث ABC است. حال با فرض اینکه زاویه C قائمه است و با توجه به سه تاییهای فیثاغورثی می توان رابطه های (۱) و (۲) را نوشت که m، n و k اعداد صحیح مثبت هستند.

$$\begin{cases} a = 2kmn,\ b = k(m^2 - n^2),\ c = k(m^2 + n^2) & (1) \\ x = \frac{1}{3}\triangle ABC = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab = \frac{k^2 mn(m^2 - n^2)}{3} & (2) \end{cases}$$

حال با کمی دقت می توان ثابت کرد که صورت آخرین کسر در فرمول (۲) بر ۲ و ۳ بخشپذیر است که حل مساله را کامل می کند.

برای دیدن راه حلی دیگر به اینجا مراجعه فرمایید.

این مساله در المپیاد داخلی سال ۱۹۸۶ اسپانیا مطرح شده بود.

---

۷. خط d و نقاط A و B را که در یک طرف این خط قرار دارند، در نظر بگیرید. نقطه P روی این خط را به گونه ای بیابید که PA+PB کوتاهترین مقدار ممکن باشد. (ادعای خود را ثابت کنید.)

حل مساله:

پاره خط BC را بصورتی رسم می کنیم که که خط d عمود منصف آن باشد. پس همواره PC=PB. بنابر این PC+AP=PB+AP.چون کوتاهترین فاصله بین دو نقطه، اندازه ی پاره خطی است که آن دو را به یکدیگر وصل می کند، بنابراین PC+AP=PB+AP کمترین مقدار خود را دارد.

---

۸. در مثلث ABC زاویه B دو برابر زاویه C است. ثابت کنید که:

$$AC^2 - AB^2 = BC \times AB$$

حل مساله:

نیمساز زاویه B را رسم کنید تا AC را در نقطه D قطع کند. دو مثلث ABD و ABC مشابهند؛ لذا:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \times AC$$

$$\begin{aligned} AB \times BC &= BD \times AC = DC \times AC \\ &= (AC - AD) \times AC \\ &= AC^2 - AD \times AC \\ &= AC^2 - AB^2 \end{aligned}$$

این مساله در مسابقه طراحی سوالات خلاق برای معلمین استان فارس مطرح شده بود.